Prof. Annette Huber-Klawitter
Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2024/25

Semi-algebraische Geometrie
Blatt 5
Abgabe: 22.11. 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.**

Betrachte einen Isomorphismus $\phi\colon K_1 \to K_2$ zwischen angeordneten Körpern. Wir wissen aus der Vorlesung, dass es zwischen den reellen Abschlüssen $L_1 \supset K_1$ und $L_2 \supset K_2$ einen Isomorphismus gibt, der ϕ fortsetzt. Zeigen Sie die Eindeutigkeit dieser Fortsetzung.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.**

Gegeben eine semi-algebraische Formel $\theta[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ sowie Elemente $b_1, \ldots, b_m$ aus $\mathbb{R}$, ist die Menge $\{(a_1, \ldots, a_n) \mid \mathcal{R} \models \theta[a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m]\}$ die *Instanz* $\theta[\bar{x}, \bar{b}]$ der semi-algebraischen Formel θ mit *Parametern* $b_1, \ldots, b_m$.

Zeigen Sie, dass folgende Mengen Instanzen semi-algebraischer Formeln sind:

(i) $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \pi)^2 + y^2 \geq 1\}$

(ii) $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 1\}$

Zeigen Sie außerdem mit Hilfe des Projektionssatzes, dass wir für X_2 eine Instanz finden können, in der keine Parameter vorkommen.

Bemerkung: Allgemeiner gilt, dass jede semi-algebraische Teilmenge X von $\mathbb{R}^n$ eine Instanz einer semi-algebraischen Formel ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**

Betrachte K_1 und K_2 zwei angeordnete Körper und die entsprechenden $\mathcal{L}_{\text{ORing}}$-Strukturen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$. Gegeben Elemente $a_1, \ldots, a_n$ von K_1 sowie $b_1, \ldots, b_n$ von K_2, setze $k_1 = \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_n)$ und $k_2 = \mathbb{Q}(b_1, \ldots, b_n)$ die davon erzeugten Teilkörper von K_1 und K_2 mit der Einschränkung der Anordnung.

(i) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Behauptungen:

  (a) Es gibt einen ordnungstreuen Isomorphismus $(k_1, \leq) \to (k_2, \leq)$, der a_i auf b_i abbildet

  (b) Das Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ erfüllt in $\mathcal{K}_1$ dieselben semi-algebraischen $\mathcal{L}_{\text{ORing}}$-Formeln wie $(b_1, \ldots, b_n)$ in $\mathcal{K}_2$.

(ii) Wenn der Projektionssatz (in der modelltheoretischen Formulierung) gilt, so haben wir für reell abgeschlossene Körper $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$, dass $\mathcal{K}_1 \preceq \mathcal{K}_2$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.**

Gegeben eine Erweiterung $\mathcal{L}$ der Sprache $\mathcal{L}_{\text{ORing}}$, betrachte K_1 und K_2 zwei angeordnete Körper und die entsprechenden $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$.

Sei nun $A \subset K_1$ eine abzählbare Menge und $\Sigma(x) = \{\phi[x, \overline{a}]\}_{\overline{a} \in A}$ ein partieller 1-Typ in $\mathcal{K}_1$. Gegeben eine elementare Einbettung $F\colon \mathcal{K}_1 \hookrightarrow \mathcal{K}_2$, zeigen Sie, dass $\{\phi[x, F(\overline{a})]\}_{\overline{a} \in A}$ ein partieller 1-Typ in $\mathcal{K}_2$ ist.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 47 im dritten Stock des mathematischen Instituts.